

УДК 532.546

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРИТОКА ЖИДКОСТИ К ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ С МНОГОЗОННЫМ ГИДРОРАЗРЫВОМ ПЛАСТА<sup>1)</sup>****М.Р. ХАМИДУЛЛИН, А.Б. МАЗО, К.А. ПОТАШЕВ***Казанский (Приволжский) федеральный университет**E-mail: marseille.ksu@gmail.com; amazo@kpfu.ru; kpotashev@mail.ru***NUMERICAL SIMULATION OF THE LIQUID FLOW TO MULTII FRACTURED HORIZONTAL WELL****M.R. KHAMIDULLIN, A.B. MAZO, K.A. POTASHEV***Kazan Federal University***Аннотация**

Решается стационарная задача притока однофазного флюида к протяженной горизонтальной скважине, осложненной многозонным гидроразрывом пласта (МГРП). Модель учитывает фильтрацию жидкости в пласте, трансверсальных трещинах МГРП, а также вязкое течение внутри ствола скважины. Для решения задачи предлагаются две схемы (сквозная и итерационная) проведения вычислительного эксперимента. Рассматривается зависимость коэффициента продуктивности горизонтальных скважин, стимулированных МГРП, от геометрии пласта, трещин и свойств жидкости.

**Ключевые слова:** Многозонный гидравлический разрыв пласта, горизонтальная скважина, математическая модель, метод конечных объемов, итерационный метод, многосеточный метод, QR-факторизация, масштабирование матрицы.

**Summary**

In this study, a model of stationary one phase flow to hydraulically multi fractured horizontal well formulated. The model consider flow in reservoir, in transverse hydraulic fractures and viscous flow in well-bore. To solve this problem two numeric schemes are proposed. Also we analyze influence of fracture geometry, reservoir characteristics and liquid properties on productivity index (PI).

**Key words:** Multistage hydraulically fracturing, horizontal well, mathematical model, finite volume method, iterative method, mutligrid matrix solver, QR factorization

**Введение**

Бурение горизонтальных скважины является новой технологией в нефтегазовой отрасли по сравнению с традиционными вертикальными скважинами. Данная технология получила сильное распространение в связи с истощением традиционных месторождений нефти и газа и необходимостью разработки нетрадиционных залежей с тяжелой нефтью и низкой проницаемостью коллекторов максимально эффективно. Для увеличения контакта между поверхностью скважины и пластов была разработана технология многостадийного гидроразрыва пласта, которая многократно увеличивает продуктивность протяженных горизонтальных скважин.

**1. Математическая модель**

Рассматривается модельная стационарная задача притока однофазного флюида из пласта к горизонтальной скважине длиной  $L$  радиуса  $r_w$ , вдоль которой выполнен многозонный гидроразрыв. Трещины

<sup>1)</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан (проекты 13-01-970044, 13-01-970031)

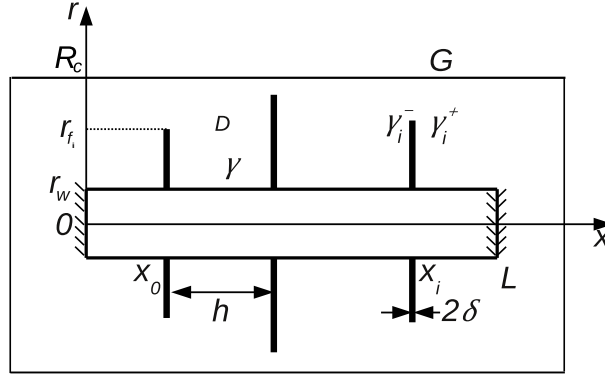


Рис. 1: Схема МГРП на ГС

ГРП расположены вдоль ствола скважины в сечениях  $x_i$  и являются ортогональными к ее оси круговыми дисками радиуса  $r_{f_i}$  и толщиной  $2\delta$  (рис. 1). Границей расчетной области является поверхность соосного со скважиной кругового цилиндра радиуса  $R_c$ , полностью содержащего в себе перфорированный участок скважины и все трещины гидроразрыва. Проницаемость пласта  $k$  и заполненных проппантом трещин  $k_f$  считаются постоянными. При таких предположениях задача является симметричной относительно оси скважины и формулируется в виде упрощенной системы безразмерных уравнений.

Уравнение для давления  $p$  в пласте [1]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

На внешней границе ( $G$ ) полагаем  $p = 1$ ; условие сопряжения на поверхности скважины ( $r = r_w$ ):  $p = \gamma p_w$ ,  $\gamma = \frac{\rho u_0^2}{\Delta p}$ ,  $u_0 = \frac{v_0}{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon = \frac{r_w}{L}$ ,  $v_0 = \sigma \frac{\Delta p}{L}$ ; граничные условия на поверхностях трещин ГРП

$$x, r \in \gamma_i^\pm, i = 1..n : \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta} (2p + p_i^\mp - 3\langle p_f \rangle_i), \alpha = \frac{\sigma_f}{\sigma}, \beta = \frac{\delta}{L}$$

Здесь  $\alpha > 1$ ,  $0 < \beta \leq 1$ ,  $\langle p_f \rangle_i$  – давление в  $i$ -й трещине,  $\sigma, \sigma_f$  – гидропроводность пласта и трещины соответственно,  $\rho$  – плотность жидкости,  $p_i^\pm$  – значения давления  $p$  на границах  $\gamma_i^\pm$  трещин.

Уравнения для давления  $p_w$  и скорости  $u_w$  в скважине

$$p'_w(x) = -8(\tilde{\eta}\tilde{\gamma} - w(x))u_w(x), \quad u'_w(x) = -2w(x); \quad (2)$$

$$x = 1 : u_w = 0, x = 0 : p_w = 0,$$

где

$$w(x) = - \left( \frac{\partial p}{\partial r} + M \sum_{i=1}^n \frac{d\langle p_f \rangle_i}{dr} \Delta(x - x_i) \right) \Big|_{r=r_w}, \quad M = 2\alpha\beta, \quad \tilde{\gamma}^2 = \frac{k}{\varepsilon r_w^2}, \quad \tilde{\eta}^2 = \frac{L\rho^2\nu^4 r_w}{k^3 \Delta p^2}$$

скорость притока к скважине;  $\Delta$  – дельта-функция Дирака; параметр  $\eta > 0$ .

Для отдельного исследования влияния вязкости  $\nu$  на результат задачи были введены новые безразмерные параметры  $\tilde{\eta}, \tilde{\gamma}$  таким образом, чтобы вязкость входила только в один из них.

Уравнения для давления  $p_f$  в трещинах

$$\frac{\beta^2}{3r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\langle p_f \rangle_i}{dr} \right) - \langle p_f \rangle_i + \tilde{p}_i = 0, \quad \tilde{p}_i = \frac{p_i^- + p_i^+}{2}, \quad (3)$$

$$r_w < r < r_f; \quad r = r_w : \langle p_f \rangle_i = \gamma p_w(x_i), \quad r = r_f : r \frac{d\langle p_f \rangle_i}{dr} = 0.$$

В отличие от упрощенных моделей ГРП [2], данная модель учитывает фильтрационное течение жидкости по трещинам, а также падение давления внутри скважины.

## 2. Дискретизация уравнений

Система (1)–(3) решается численно с помощью метода конечных объемов [3]. Пласт, трещины МГРП и горизонтальная скважина покрываются сеткой, имеющей логарифмическое сгущение (вблизи скважины) по оси ОР и регулярный характер по оси ОХ.

Уравнение для давления (1) интегрируется по  $V_k$

$$\int_{V_k} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) dV + \int_{V_k} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dV = 0 \quad (4)$$

где  $dV = r dr dx$ ,  $V_k$  –  $k$ -й конечный объем. Здесь и далее по  $p$  будем понимать среднее значение для давления внутри одного конечного объема, которое определяется следующим образом  $\bar{p} = \frac{1}{V_k} \int_{V_k} p dV$ .

Черта над средними величинами опущена, чтобы не загромождать формулы. Координаты узлов  $V_k$  элемента обозначим  $x_m^k, r_m^k, m = 1, 2$ . Тогда уравнение (4) примет вид

$$\int_{x_0^k}^{x_1^k} r \frac{\partial p}{\partial r} \bigg|_{r_0^k}^{r_1^k} dx + \int_{r_0^k}^{r_1^k} \frac{\partial p}{\partial x} \bigg|_{x_0^k}^{x_1^k} r dr = 0 \quad (5)$$

Окончательно

$$r \frac{\partial p}{\partial r} \bigg|_{r_0^k}^{r_1^k} \cdot (x_1^k - x_0^k) + \frac{\partial p}{\partial x} \bigg|_{x_0^k}^{x_1^k} \cdot \left( \frac{(r_1^k)^2 - (r_0^k)^2}{2} \right) = 0 \quad (6)$$

Если  $x_m^k, r_m^k \in \gamma_i^\pm$ , то  $\frac{\partial p}{\partial x} \bigg|_{x_1^k} \approx -\frac{\alpha}{\beta} (2p + p_i^\mp - 3\langle p_f \rangle_i)$

Первое уравнение для из (3) аналогично интегрируется по  $V_k^f$ . Введя обозначение

$$\overline{\langle p_f \rangle_i} = \frac{1}{V_k^f} \int_{V_k^f} \langle p_f \rangle_i dV,$$

где  $dV = r dr$  и подставив его в данное уравнение, приведем его к следующему виду (черта над средними опущена)

$$r \frac{d\langle p_f \rangle_i}{dr} \bigg|_{\tilde{r}_0^k}^{\tilde{r}_1^k} - V_k^f \cdot \langle p_f \rangle_i + V_k^f \cdot \tilde{p}_i = 0 \quad (7)$$

Осредненные уравнения внутри скважины (2) интегрируются по КО принадлежащим скважине

$$\begin{aligned} [u] (\hat{x}_1^{k-1}) &= [u] (\hat{x}_1^k) + 2 \int_{\hat{x}_1^{k-1}}^{\hat{x}_1^k} w dx, \\ p_w (\hat{x}_0^k + h/2) &= p_w (\hat{x}_0^k - h/2) - \int_{\hat{x}_0^k - h/2}^{\hat{x}_0^k + h/2} 8[u] (\hat{x}_0^k) (\tilde{\eta}\tilde{\gamma} - w) dx \end{aligned} \quad (8)$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$[u] (\hat{x}_1^k = 1) = 0, \quad p_w (\hat{x}_0^k = 0) = p_0 \quad (9)$$

### 3. Методы решения

Предложенная задача решалась численно двумя методами: многосеточным методом [4] и методом QR-факторизации [5]. Отличие этих методов заключается в том, что многосеточный метод накладывает на матрицу системы линейных уравнений (СЛАУ) условие диагонального преобладания [5], которое нарушается за счет наличия условий третьего рода на границе трещин МГРП и пласта. В следствие чего для согласования решений в пласте и трещинах МГРП необходимо организовать итерационный процесс с использованием релаксации [5,6] по давлению. QR-факторизация не накладывает дополнительных условий на матрицу СЛАУ и позволяет получить точное решение системы для сквозной постановки, когда система уравнений для пласта и трещин МГРП решаются совместно. Однако, в таком случае в матрице системы наблюдаются заметные колебания значений коэффициентов, и поэтому разумно провести предварительное перемасштабирование матрицы [7] с тем, чтобы все диагональные элементы стали равными единице.

### 4. Результаты

Рассматривается модельный однородный пористый пласт, который эксплуатируется горизонтальной скважиной, осложненной трансверсальной трещиной ГРП. Расчеты проводились при следующих параметрах:  $L = 300\text{м}$ ;  $r_w = 0.1\text{м}$ ;  $\delta = 0.01\text{м}$ ;  $k = 10^{-12}\text{ м}^2$ ;  $\Delta p = 50\text{ атм}$ ,  $\rho = 860\text{ кг/м}^3$ .

Анализ результатов показал, что наибольшее влияние на прирост дебита жидкости  $q$  оказывают коэффициенты  $M$  и  $\tilde{\eta}^2$ , а также увеличение радиуса трещины (рис. 2). На графиках по оси ординат отложен приведенный дебит.

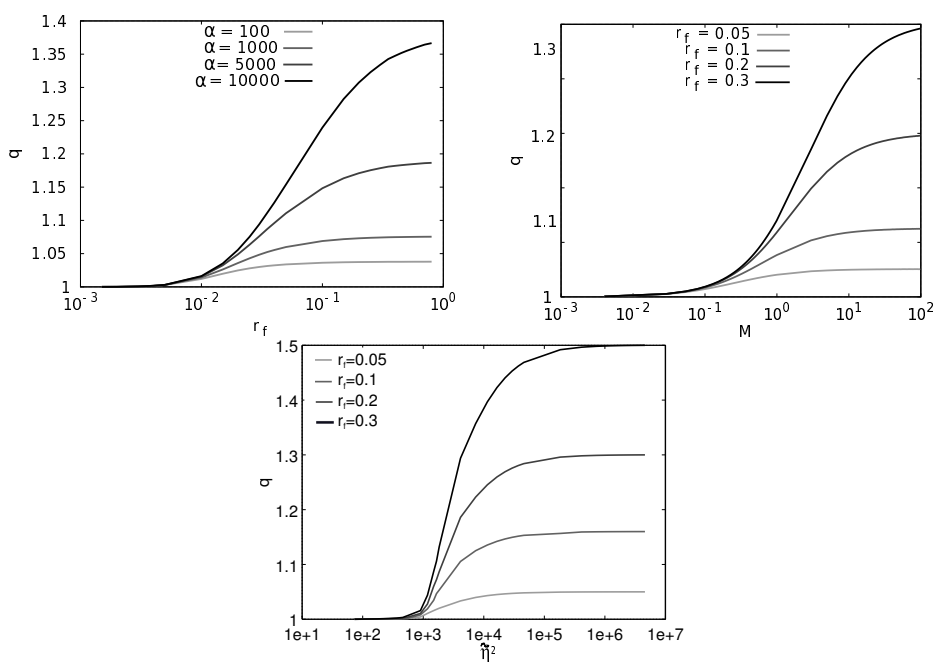


Рис. 2: Кривые изменения дебита

Была решена оптимизационная задача определения таких радиусов трещин МГРП, которые обеспечивали бы равномерный приток из этих трещин в скважину (рис. 3).

### 5. Выводы

1. Предложена двумерная математическая модель процесса фильтрации жидкости в призабойной зоне горизонтальной скважины с МГРП с учетом фильтрации внутри трещин, а также вязкого течения внутри ствола скважины.

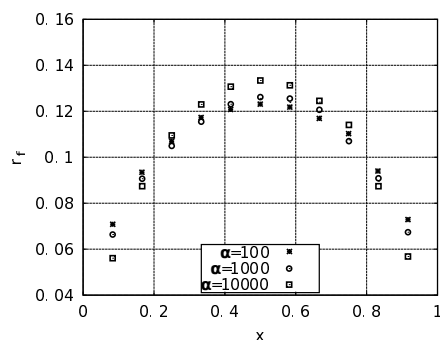


Рис. 3: Радиусы трещин, обеспечивающие равномерный приток к ГС

2. Разработан эффективный численный метод расчета изменения дебита горизонтальной скважины, осложненной трансверсальными трещинами многозонного гидравлического разрыва пласта.
3. Предлагаемая модель может быть использована для оценки эффективности проведения МГРП на горизонтальных скважинах, а также для определения радиуса трещин, дающих равномерный приток жидкости без локальных прорывов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.** Подземная гидромеханика. — М: Недра, 1993. — 303 с.
2. **Каневская Р.Д.** Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. — М: Недра, 1999. — 212 с
3. **Ильин В.П.** Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. — 345 с.
4. **Wolfgang HackBusch** Multi-grid methods and applications. — Springer, 2010. — 378 p.
5. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999. — 548 с.
6. **Ильин В.П.** Методы неполной факторизации для решения линейных систем. — М: Физматлит, 1995.
7. **Форсайт Дж., Молер К.** Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. — М: Мир, 1969. — 167 с.

#### REFERENCES

1. **Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M.** Subsurface hydromechanics [Podzemnaya girdomehanika]. — Moscow: Nedra, 1993. — 303 p. (in Russian)
2. **Kanevskaya R.D.** Mathematical modeling of oil and gas reservoir developing with hydraulic fracturing [Matematicheskoe modelirovanie razrabotki mestorozhdeniy nefi i gaza s primeneniem gidravlicheskogo razryva plasta]. — Moscow: Nedra, 1999. — 212 p. (in Russian)
3. **Il'in V.P.** Finite differences and finite volume methods for elliptical equations [Metod konechnykh raznostey i konechnykh ob'ёмov dlya ellipticheskikh uravneniy]. — Novosibirsk: Izv-do In-ta matematiki, 2000. — 345 p. ((in Russian))
4. **Wolfgang HackBusch** Multi-grid methods and applications. — Springer, 2010. — 378 p.
5. **Golub Gene H., val Loan Charles F.** Matrix computations. — Johns Hopkins University Press, 1996. — 548 p.
6. **Il'in V.P.** Methods of partial factorization for solving linear system [Metody nepolnoy factorizacii dlya resheniya lineynykh zadach]. — Moscow: Fizmatlit, 1995. (in Russian)
7. **Forsythe G., Moler K.** Computer solution of linear algebraic system. — Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967. — 167 p.